

LFM 펄스 열 신호의 FDOA 추정 한계성능 분석

박근호, 김동규, 박진오*, 고재현*, 곽현규**, 김형남[Ⓢ]

부산대학교, *LIG nex1, **국방과학연구소

hnkim@pusan.ac.kr

Cramer-Rao Lower Bound on the FDOA estimation of LFM pulse train signals

Geun-Ho Park, Dong-Gyu Kim, Jin-Oh Park*, Jae-Heon Ko*, Hyun-Gyu Kwak**,

Hyoung-Nam Kim[Ⓢ]

Pusan National Univ., *LIG Nex1, **Agency for Defense Development

요약

전자전 분야에서 위협 신호원의 위치추정을 위해 이격된 다수의 수신단에서 획득한 신호의 TDOA (time difference of arrival)와 FDOA (frequency difference of arrival)를 활용하는 연구가 활발히 진행되고 있다. 신호원의 위치 추정은 TDOA/FDOA 추정을 기반으로 이루어지기 때문에, TDOA/FDOA의 추정 오차에 대한 정확한 성능 분석이 요구된다. 본 논문에서는 전자전 분야에서 획득 가능한 신호원에 따른 FDOA 추정 오차의 변화를 확인하기 위해, CRLB를 이용하여 LFM 펄스 열 신호에 대한 FDOA 추정치의 한계성능을 도출한다.

I. 서론

전자전 환경에서 이동하는 위협 신호원으로부터 방사된 신호를 이격된 다수의 수신단에서 획득하는 경우, 수신 신호의 도달 시간 및 주파수 차이를 의미하는 TDOA (time difference of arrival)와 FDOA (frequency difference of arrival)를 이용하여 위협 신호원의 위치를 추정할 수 있다 [1]. 미상 신호원의 위치 추정은 수신 신호의 TDOA/FDOA 추정치를 기반으로 이루어지기 때문에, TDOA/FDOA 추정치의 한계성능 분석으로부터 위치 추정 정확도를 예측 및 분석하는 과정이 요구된다.

본 논문에서는 추정치 분산의 하한 (lower bound)을 의미하는 CRLB (Cramer-Rao lower bound) [2]를 이용하여 FDOA 추정치의 한계성능을 분석한다. 특히, 전자전 환경에서 획득 가능한 레이더 신호 중 하나인 LFM (linear frequency modulation) 펄스 열 신호를 획득한 경우의 CRLB를 유도하여 추정 가능한 FDOA의 성능 하한을 도출한다.

II. 본론

Cramer-Rao Lower Bound (CRLB)는 확률 밀도 함수 $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 에 의해 분포하는 관측 데이터 \mathbf{x} 로부터 파라미터 벡터인 $\boldsymbol{\theta}$ 를 추정할 때, 추정치 분산의 하한을 의미한다. CRLB는 Fisher information 행렬 $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}$ 의 역행렬, Fisher information 행렬 $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}$ 는 $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 의 파라미터 벡터 $\boldsymbol{\theta}$ 의 2차 편미분으로 정의되며 이를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다 [3].

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &\geq \text{diag}\{\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\}, \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}} &= -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}\right]. \end{aligned} \quad (1)$$

CRLB는 추정 파라미터를 포함한 관측 데이터 혹은 수신 신호 모델로부터 유도할 수 있다. 신호원이 방사한 미상의 신호를 $x[n]$, 각 수신단에서 획득한 신호를 $r_1[n]$ 과 $r_2[n]$, 각 수신단에서의 가우시안 잡음을 $w_1[n]$ 과 $w_2[n]$ 라 하면 수신 신호 모델은 TDOA τ 와 FDOA ν 를 이용하여 다

음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} r_1[n] &= x[n] + w_1[n], \\ r_2[n] &= ae^{j\phi} e^{j\nu n} x[n - \tau] + w_2[n], \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 a 와 ϕ 는 $r_1[n]$ 에 대한 $r_2[n]$ 의 신호 이득과 위상을 의미한다. 추정 파라미터 벡터를 $\boldsymbol{\theta} = [\phi, \tau, \nu]^T$, 각 수신단의 잡음 신호 파워를 σ_1^2 과 σ_2^2 , 송신 신호 벡터를 \mathbf{x} 라 할 때, $\boldsymbol{\theta}$ 에 대한 Fisher information $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}$ 는 식 (3)과 같이 유도할 수 있다 [2].

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 / a^2} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}^H \mathbf{x} & -\mathbf{x}^H \mathbf{x}' & \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}} \\ -\mathbf{x}'^H \mathbf{x} & -\mathbf{x}'^H \mathbf{x}' & -\text{Re}\{\mathbf{x}'^H \mathbf{Q}^H \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}}\} \\ \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}} & -\text{Re}\{\mathbf{x}'^H \mathbf{Q}^H \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}}\} & \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{N}^2 \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)의 파라미터를 정리하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left[x\left[-\frac{N}{2}\right], x\left[-\frac{N}{2}+1\right], \dots, x\left[\frac{N}{2}-1\right] \right], \\ \mathbf{n} &= \left[-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right]^T, \\ \mathbf{N} &= \text{diag}\{\mathbf{n}\}, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{D}_\nu \mathbf{F}^H \mathbf{D}_\tau \mathbf{F}, \\ \mathbf{D}_\tau &= \text{diag}\left\{ \exp\left(-j\frac{2\pi}{N} \mathbf{n} \cdot \tau\right) \right\}, \\ \mathbf{F} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j\frac{2\pi}{N} \mathbf{nn}^T\right), \\ \mathbf{D}_\nu &= \text{diag}\{\exp(j\nu \mathbf{n})\}, \\ \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q} \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}' &= \frac{2\pi}{N} \mathbf{F}^H \mathbf{N} \mathbf{F} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4)$$

$\boldsymbol{\theta} = [\phi, \tau, \nu]^T$ 의 추정치를 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 라 할 때, CRLB는 Fisher information 행

렬의 역행렬 \mathbf{J}_θ^{-1} 의 i 번째 대각성분인 $[\mathbf{J}_\theta^{-1}]_{ii}$ 에 의해 결정되며 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\text{var}(\hat{\theta}_i) \geq [\mathbf{J}_\theta^{-1}]_{ii}. \quad (5)$$

본 논문에서 고려하고자 하는 FDOA 추정치의 CRLB는 \mathbf{J}_θ^{-1} 의 3 번째 대각성분으로부터 유도할 수 있으며, 이를 나타내면 다음 식과 같다.

$$\text{var}(\hat{\nu}) \geq [\mathbf{J}_\theta^{-1}]_{33}. \quad (6)$$

III. 모의실험

LFM 펄스 열 신호의 FDOA 추정 성능 하한을 분석하기 위해 signal to noise ratio (SNR)과 펄스 폭에 따른 FDOA의 CRLB를 유도하였다. SNR은 펄스 내에서의 잡음 파워 대비 신호 파워로 정의하였으며 1, 2, 5, 10 μs 의 펄스 폭을 사용하여 CRLB 변화를 확인하였다. 수집한 펄스 개수는 30 개, PRI (pulse repetition interval)는 50 μs , LFM 펄스 열 신호의 주파수는 펄스 내에서 -1 MHz부터 1 MHz까지 변화도록 기저대역 신호 (baseband signal)를 생성하였다.

그림 1은 SNR에 따른 FDOA 추정치의 표준 편차 하한을 나타낸 것으로서, 표준 편차 하한은 다음 식과 같이 식 (6)에 제곱근을 적용하여 유도할 수 있다.

$$\text{std}(\hat{\nu}) \geq \sqrt{[\mathbf{J}_\theta^{-1}]_{33}}. \quad (7)$$

모의실험 결과, LFM 펄스 열 신호는 펄스 폭이 증가함에 따라 FDOA 추정 오차가 감소하는 경향을 나타내는 것을 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 이격된 두 수신단에서 LFM 펄스 열 신호를 수신한 경우, FDOA 추정치의 한계성능을 CRLB를 이용하여 분석하였다. FDOA의 CRLB를 유도한 결과, 펄스 폭이 증가함에 따라 FDOA 추정 오차가 감소하는 것을 확인할 수 있다. LFM 펄스 열 신호의 FDOA 추정 한계성능 분석 결과는 FDOA 추정 알고리즘의 성능 평가 기준으로 활용 가능할 것으로 기대된다.

ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 국방과학연구소의 “수동형 정밀감시장비 사업: 펄스형 신호에 대한 FDOA 정밀 추정기술 연구 (계약번호 YD15-0962)”에 대한 연구용역으로 수행하였음.

참고 문헌

- [1] 김동규, 김용희, 한진우, 송규하, 김형남, “TDOA/FDOA 융합 기반 신호원의 위치추정 및 성능 분석,” *한국통신학회논문지*, vol. 38C, no. 9, 2013년 9월.
- [2] A. Yeredor, E. Angel, “Joint TDOA and FDOA Estimation: A Conditional Bound and Its Use for Optimally Weighted Localization,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 4, Apr. 2011.
- [3] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume 1, Estimation Theory*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

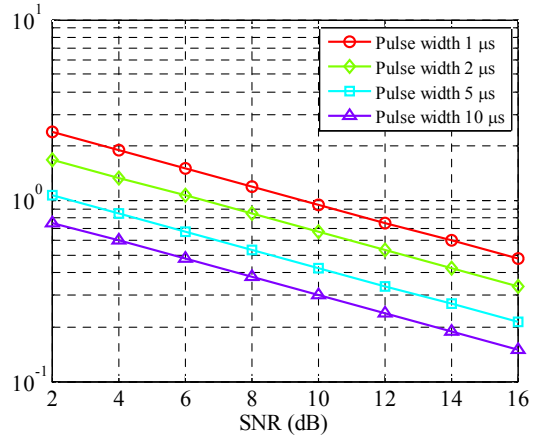


그림 1. LFM 펄스 열 신호에 대한 FDOA의 CRLB.