다중 주파수 대역 신호에 대한 도래각 추정의 Cramer-Rao Lower Bound 분석

박근호, 김동규, 김호재, 김형남© (부산대학교)

©hnkim@pusan.ac.kr

An Analysis of Cramer-Rao Lower Bound for the Angle Estimation of Multi-band Signals

Geun-Ho Park, Dong-Gyu Kim, Ho Jae Kim, Hyoung-Nam Kim© (Pusan National Univ.)

요 약

일반적으로 도래각 추정은 일정한 반송파 주파수 값으로 가정할 수 있는 다수의 협대역 신호가 배열 안테나로 입사하는 수신 환경을 다룬다. 이와 같은 신호 수신 환경을 단일 주파수 대역 (single-band) 신호 기반의 도래각 추정 문제라 할 때, 다양한 값의 반송파 주파수를 가지는 협대역 신호가 신호원으로부터 방사되어 다수 입사하는 수신 환경을 다중 주파수 대역 신호 기반의 도래각 추정 문제로 정의할 수 있다. 본 논문에서는 다중 주파수 대역에 대한 신호 수신 환경 기반의 도래각 추정에 대한 Cramer-Rao lower bound (CRLB)를 유도하고, 이를 통해 단일 및 다중 주파수 대역 신호 수신 환경에서의 도래각 추정 성능의 차이를 CRLB의 관점으로 분석한다.

Ⅰ. 서 론

도래각 추정은 다수의 안테나로 구성된 배열 안테나 구조를 이용하여 입사하는 신호의 각도를 추정하는 것을 의미하는 것으로서, 도래각 정보는 레이더 및 소나와 같은 정밀 위치 추정 시스템에서 표적의 위치를 추정하기 위해 사용되거나 빔 이득을 얻기 위한 빔 형성기의 조향 각도 설정을 위해 활용될 수 있다[1]. 도래각 추정을 위해 활용되는 대표적인 알고리즘으로는 MUSIC (multiple signal classification)과 ESPRIT (estimation of signal parameters via rotational invariance) 등이 존재한다[2].

이와 같은 기존의 도래각 추정 알고리즘은 하나의 신호원에 대해 일반적으로 특정한 반송파 주파수를 가지는 협대역 신호가 입사되는 수신 환경을 가정한다. 예를 들면, 균일 선형 배열 안테나 (uniform linear array) 배치에서 입사되는 신호의 파장은 안테나 배치 간격의 두 배에 해당하는 것으로 가정하는 것이 일반적이다[2]. 즉, 하나의 신호원에는 특정한 반송파 주파수 값이 할당된다.

특정 신호원으로부터 방사된 협대역 신호가 하나의 반송파 주파수 값을 가지는 신호 수신 환경을 단일 주파수 대역 신호 기반의 도래각 추정 문제라 하면, 다양한 반송파 주파수를 가지는 다수의 협대역 신호가 하나의 신호원으로부터 방사되어 수신기에 측정되는 환경을 다중 주파수 대역 신호 기반의 도래각 추정 문제로 정의할 수 있다[3]. 본 논문에서는 이와 같은 다중 주파수 대역 신호 환경에서의 도래각 추정에 대한 성능 분석을 수행하기 위해 도래각에 대한 Cramer-Rao Lower Bound (CRLB)를 유도하고, 단일 주파수 대역과 다중 주파수 대역 신호 환경에 따른 도래각 추정 성능을 CRLB의 관점에서 비교 및 분석한다.

Ⅱ. 수신 신호 모델

다수의 안테나로 구성된 배열 안테나에 수신되는 신호의 공간적 특징은 조향 벡터 (steering vector)를 통해 나타낼 수 있다. M 개의 안테나로 구성된 균일 선형 배열안테나 (uniform linear array)를 활용한다고 가정할 때, i 번째 주파수 대역에서 각도 θ로 입사하는 신호에 대한 조향 벡터는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{a}^{(i)}(\theta)=\left[1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda^{(i)}}d\sin(\theta)}, \cdots, e^{-j(M-1)\frac{2\pi}{\lambda^{(i)}}d\sin(\theta)}\right]^T, \quad i=1,\ldots,N_{ch}. \tag{1}$$

여기서, $\lambda^{(i)}$는 i 번째 주파수 대역에 해당하는 반송파 주파수의 파장을 의미하며 N_{ch}는 주파수 대역의 개수를 나타낸다. K 개의 신호가 $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\ldots,\theta_K]^T$의 각도로 수신기에 입사한다고 할 때, i 번째 대역에서의 수신 신호 $\mathrm{x}^{(i)}(t_n)$은 아래의 식으로 정리할 수 있다.

$$\mathrm{x}^{(i)}(t_n)=\mathrm{A}^{(i)}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{s}^{(i)}(t_n)+\mathrm{w}^{(i)}(t_n), \quad n=1,\ldots,N. \tag{2}$$

식 (2)에서 윗첨자 (i)는 i 번째 주파수 대역에 대한 파라미터를 의미하며, N은 총 샘플 개수, $\mathrm{s}^{(i)}(t_n)=\left[s_1^{(i)}(t_n),\ldots,s_K^{(i)}(t_n)\right]^T$는 $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\ldots,\theta_K]^T$의 각도로 입사하는 K 개의 신호 벡터, $\mathrm{w}^{(i)}(t_n)=\left[w_1^{(i)}(t_n),\ldots,w_M^{(i)}(t_n)\right]^T$는 각 안테나에서 측정되는 잡음 벡터, $\mathrm{A}^{(i)}(\boldsymbol{\theta})$는 K 개의 신호가 입사하는 각도에 대한 조향 벡터를 열벡터로 하는 array manifold matrix를 나타낸다. 본 논문에서는 모든 주파수 대역에 대한 수집 신호 $\mathrm{x}^{(i)}(t_n)$ $(n=1,\ldots,N,\ i=1,\ldots,N_{ch})$와 $\mathrm{s}^{(i)}(t_n)$ $(i=1,\ldots,N_{ch})$이 주어질 때, 각 입사 신호에 대한 도래각에 대한 CRLB를 유도하고 이에 대해 분석한다.

Ⅲ. 다중 주파수 대역 신호에 대한 도래각의 CRLB 유도

일반적으로 추정하고자 하는 파라미터에 대한 CRLB는 수신 신호의 log-likelihood function을 미상 파라미터 벡터로 2 차 편미분하여 얻을 수 있는 피셔 정보 행렬 (Fisher information matrix)의 역행렬로부터 유도할 수 있다[4]. 식 (2)와 같이 유도한 수신 신호 모델에 대한 log-likelihood function은 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\ln L = &-NMN_{ch}\ln\pi - N\ln\det(\mathrm{Q}) \\ &-\sum_{i=1}^{N_{ch}}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{(i)H}(t_n)\left[\mathrm{Q}^{(i)}\right]^{-1}\mathrm{e}^{(i)}(t_n),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathrm{e}^{(i)}(t_n)=\mathrm{x}^{(i)}(t_n)-\mathrm{A}^{(i)}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{s}^{(i)}(t_n). \tag{4}$$

여기서 $\mathrm{Q}^{(i)}=E\left[\mathrm{w}^{(i)}(t_n)\mathrm{w}^{(i)T}(t_n)\right]$는 각 주파수 대역에서 측정되는 가우시안 잡음의 공분산 행렬이며, $\mathrm{Q}=\mathrm{blkdiag}\left(\left\{\mathrm{Q}^{(i)}\right\}_{i=1,\ldots,N_{ch}}\right)$는 각 주파수 대역의 공분산 행렬을 대각 행렬로 하는 잡음 공분산 행렬을 나타낸다.

본 논문에서 미상 파라미터 벡터는 K 개의 입사 신호에 대한 도래각과 잡음 공분산 행렬의 모든 성분으로서, 미상 파라미터 벡터를 $\boldsymbol{\psi}=\left[\boldsymbol{\theta}^T,\{\mathrm{vec}(\mathrm{Q})\}^T\right]^T$라 할 때, 피셔 정보 행렬은 $\boldsymbol{\psi}$를 이용하여 아래의 식으로 정의할 수 있다.

$$\mathrm{I}(\boldsymbol{\psi})=E\left[\left(\frac{\partial\ln L}{\partial\boldsymbol{\psi}}\right)\left(\frac{\partial\ln L}{\partial\boldsymbol{\psi}}\right)^T\right]. \tag{5}$$

잡음 공분산 행렬의 모든 성분을 벡터화한 것을 $\gamma = \mathrm{vec}(\mathrm{Q})$라 할 때, 아래의 식이 성립하며, 이는 도래각에 대한 MVU (minimum variance unbiased) estimates와 γ가 독립적이라는 것을 의미한다[4].

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}\right)^T\right] = 0. \tag{6}$$

따라서, 식 (5)로부터 도래각 벡터에 대한 CRLB 행렬은 아래의 식으로부터 유도할 수 있다.

$$\mathrm{CRLB}(\theta) = \left[E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^T\right]\right]^{-1}. \tag{7}$$

식 (7)을 이용하여 CRLB를 유도하기 위해, 식 (3)의 도래각 벡터에 대한 편미분 벡터를 각 주파수 대역에 대한 log-likelihood function의 도래각 벡터에 대한 편미분 합으로 정리할 수 있으며, 이는 아래와 같다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{N_{ch}} \frac{\partial \ln L^{(i)}}{\partial \theta}. \tag{8}$$

각 주파수 대역에 대한 log-likelihood function의 θ에 대한 편미분 식은 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial \ln L^{(i)}}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{N} 2\mathrm{Re}\left[\mathrm{S}^{(i)H}(t_n)\widetilde{\mathrm{D}}^{(i)H}(\theta)\,\tilde{\mathrm{e}}(t_n)\right]. \tag{9}$$

여기서 $\mathrm{S}^{(i)}(t_n) = \mathrm{diag}\left(\left\{s_1^{(i)}(t_n), \ldots, s_K^{(i)}(t_n)\right\}\right)$이고, $\mathrm{D}^{(i)} = \left[\mathrm{d}^{(i)}(\theta_1), \ldots, \mathrm{d}^{(i)}(\theta_K)\right]$, $\mathrm{d}^{(i)}(\theta_k) = \partial\, \mathrm{a}^{(i)}/(\partial \theta_k)$, $\widetilde{\mathrm{X}}^{(i)} = \left[\mathrm{Q}^{(i)}\right]^{-1/2}\mathrm{X}^{(i)}$를 나타낸다. 식 (9)를 식 (8)에 대입하여 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{N_{ch}}\sum_{n=1}^{N} 2\mathrm{Re}\left[\mathrm{S}^{(i)H}(t_n)\widetilde{\mathrm{D}}^{(i)H}(\theta)\,\tilde{\mathrm{e}}(t_n)\right]. \tag{10}$$

식 (10)을 식 (7)에 대입하여 정리하면, 아래의 식으로 나타낼 수 있다[4].

$$\mathrm{CRLB}^{-1}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_{ch}}\sum_{n=1}^{N} 2\mathrm{Re}\left[\mathrm{S}^{(i)H}(t_n)\widetilde{\mathrm{D}}^{(i)H}(\theta)\,\widetilde{\mathrm{D}}^{(i)}(\theta)\,\mathrm{S}^{(i)}(t_n)\right]. \tag{11}$$

균일 선형 배열 안테나에서의 잡음 공분산 행렬을 $\mathrm{Q} = \sigma^2 \mathrm{I}$라 하면, k 번째 신호원에 대한 도래각 θ_k의 CRLB는 아래의 식으로 정리할 수 있다[4].

$$\mathrm{CRLB}(\theta_k) = \frac{3\sigma^2}{N(M-1)M(2M-1)\cos^2(\theta_k)} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_{ch}}\left(\frac{2\pi d}{\lambda^{(i)}}\right)^2\left[\mathrm{R}_{ss}^{(i)}\right]_{kk}\right)^{-1}. \tag{12}$$

식 (12)에서 $\left[\mathrm{R}_{ss}^{(i)}\right]_{kk} = \left[E\left[\mathrm{s}^{(i)}(t_n)\mathrm{s}^{(i)H}(t_n)\right]\right]_{kk}$를 의미하며 $[\,\cdot\,]_{kk}$는 정방 행렬의 (k, k) 성분을 나타낸다.

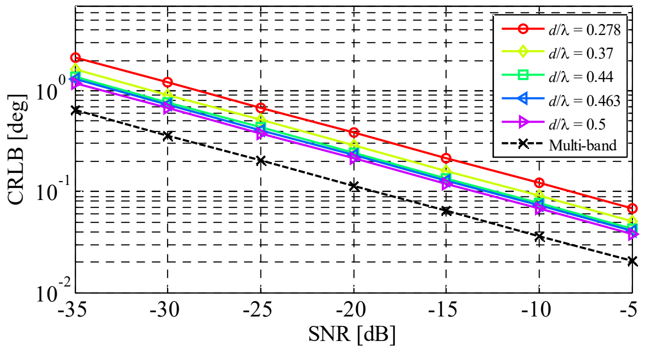

그림 1. SNR (signal-to-noise ratio)에 따른 도래각에 대한 CRLB.

Ⅳ. 모의실험

균일 선형 배열에서 안테나의 개수를 10 개, 수집 샘플 수를 5000 개, 주파수 대역 신호 개수를 5 개로 모의실험을 수행하였다. 또한, 안테나 사이의 간격을 d라 할 때, 각 주파수 대역의 파장은 d/λ가 각각 0.278, 0.37, 0.44, 0.463, 0.5를 만족하도록 하였고, 신호원의 입사각은 -20 도로 설정하였다.

그림 1은 각 단일 주파수 대역과 다중 주파수 대역 신호 기반 도래각 추정의 CRLB를 비교한 것으로서, 단일 주파수 대역 신호에 대해서는 주파수가 증가할수록 도래각 추정 성능이 우수한 것을 확인할 수 있다. 5 개의 주파수 대역을 모두 사용하는 경우에는 $d/\lambda = 0.5$를 만족하는 단일 주파수 대역 신호에 비해 약 SNR 5 dB, $d/\lambda = 0.278$를 만족하는 주파수 대역 신호에 비해 약 SNR 10 dB 정도의 성능 향상이 있는 것을 확인할 수 있다. 식 (12)에서도 확인할 수 있듯이, 다수의 주파수 대역에 대한 신호가 활용 가능하다는 것은 $\left(\sum_{i=1}^{N_{ch}}\left(\frac{2\pi d}{\lambda^{(i)}}\right)^2\left[\mathrm{R}_{ss}^{(i)}\right]_{kk}\right)^{-1}$ 값이 단일 주파수 대역 신호에 비해 감소하는 것을 의미하므로, 다수의 주파수 대역 신호를 이용하면 도래각 추정 성능이 개선될 수 있음을 식 (12)와 모의실험을 통해 모두 확인할 수 있다.

Ⅴ. 결론

본 논문에서는 다중 주파수 대역 신호에 대한 도래각 추정의 CRLB를 유도하고, 단일 주파수 대역 신호에 대한 CRLB와 비교 및 분석하였다. 다중 주파수 대역 신호에 대한 도래각 추정의 CRLB를 유도한 결과, 단일 주파수 대역 신호에 대한 CRLB에 비해 SNR 5 dB에서 10 dB 정도에 대한 도래각 추정 성능의 향상이 있는 것을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] J. G. Andrew, S. Buzzi, W. Choi, S. V. Hanly, A. Lozano, A. C. K. Soong, J. C. Zhang, “What will 5G be?” *IEEE Selected Areas in Comm.* vo. 32, no. 6, pp. 1065-1082, Jun. 2014.

[2] R. O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE Trans. Antennas and propagation*, vol. AP-34, no. 3, Mar. 1986.

[3] T. Terada, et al, “DOA estimation of multi-band signals using a sparse signal reconstruction method,” *Proc. IEEE-APS/URSI International Symposyum 2013*, pp. 866-867, Jul. 2013.

[4] J. Li, B. Halder, P. Stoica, M. Viberg, and T. Kailath, “Decoupled maximum likelihood angle estimation for signals with known waveforms,” Chalmers Univ. of Technol., Gothenburg, Sweden, Tech. Rep. no. CTH-TE-8, Feb. 1994.