

비균일 선형배열안테나에서

Capon method를 이용한 도래각 추정 방법

박근호*, 신종우*, 김형남**

*부산대학교 전자전기컴퓨터공학과, **부산대학교 전자공학과

**hknkim@pusan.ac.kr

초록: 비균일 선형배열안테나에서 도래각 추정 시 추정 가능한 신호원의 개수를 최대화 하기 위해 augmented covariance matrix 가 제안되었다. 본 논문에서는 augmented covariance matrix 의 고유값 중 일부가 음수로 나타나는 특성으로 인해 도래각 추정 알고리즘의 하나인 Capon method 가 제대로 동작하지 않는 현상을 분석한다. 그리고 이를 해결하기 위해 양수의 고유값을 가지는 새로운 공분산 행렬을 이용하면 비균일 선형배열안테나에서 Capon method 를 이용한 도래각 추정이 가능하다는 것을 모의전산실험을 통해 확인한다.

주제어: Direction-of-arrival, non-uniform linear arrays, augmented covariance matrix, Capon method

I. 서론

도래각 (direction-of-arrival, DOA) 추정은 레이더, 소나 등에서 사용되고 있는 배열 신호처리 기법 중의 하나로서 수신단에 입사하는 신호원의 입사각도를 추정하는 방법이다. 이러한 도래각 추정기법은 안테나배열을 이용해 공간에 분포하는 신호를 획득하기 때문에 다수의 신호원을 구분하는 것이 가능하다. 하나의 안테나배열에서 구분 가능한 신호원의 개수를 DOF (degree-of-freedom)라고 하며 DOF는 배열을 구성하는 안테나의 개수에 의해 결정된다. 안테나 배열을 구성하는 방법 중에서 구조의 간단함과 신호처리의 편리성으로 인해 가장 널리 사용되고 있는 균일선형배열 안테나의 경우, N 개의 안테나를 이용하여 $N-1$ 의 DOF를 달성할 수 있다고 알려져 있다 [1]. 반면에, 제한된 안테나 개수를 이용하여 구분 가능한 신호원의 개수를 극대화 시키기 위해 비균일 선형배열안테나 구조 또한 제안되어왔으며, 대표적인 방법으로는 최적의 비균일 선형배열 방법인 MRA (minimum redundancy linear arrays)와 MRA에 비해 다소 쉽게 구성 가능한 nested array 가 있다 [1], [2].

일반적으로 균일 선형배열안테나에서는 Capon method, MUSIC (multiple signal classification)과 같은 공분산 기반의 도래각 추정 알고리즘이 우수한 성능을 보이는 것으로 알려져 있으며, 이러한 알고리즘들은 비균일 선형배열안테나에서도 적용이 가능하지만 DOF의 극대화를 위해서는 augmented covariance matrix를 이용한 공분산 행렬 연산이 제안되었다 [3]. 하지만, 비균일 선형배열안테나에서 augmented covariance matrix를 이용할 때 공분산 행렬이 부정적

행렬 (indefinite matrix)인 경우 Capon method가 동작하지 문제점이 있다. 본 논문에서는 이러한 문제가 발생하는 이유를 MUSIC 알고리즘과 비교하여 수식적으로 분석하였다. 그리고 이를 해결하기 위하여 고유값의 절대값을 취하여 새로운 공분산 행렬을 만들어 도래각 추정에 사용하였다. 제안된 방법을 통해 비균일 선형배열안테나에서 Capon method를 이용하여 DOF를 극대화할 수 있도록 하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 고유값의 절대값을 이용한 비균일 선형배열안테나에서 Capon method의 적용방법에 대해 설명한다. III장에서는 모의 실험을 통해 제안된 방법의 성능을 분석하고, IV장에서 결론을 맺는다.

II. 비균일 선형배열안테나에서 augmentation 과 Capon method 를 이용한 도래각 추정 방법

D 개의 신호원을 $\mathbf{s}(t_q)$, 각 안테나의 잡음을 $\mathbf{n}(t_q)$, 선형배열안테나에서 측정되는 N 개 안테나에 대한 신호를 $\mathbf{x}(t_q)$ 라고 하면 측정된 신호의 모델은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(t_q) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t_q) + \mathbf{n}(t_q) \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \dots \mathbf{a}(\theta_D)]$ 는 각 신호원이 각도에 따라 지연되는 정도를 나타내는 조향 벡터 $\mathbf{a}(\theta_d) = [1 e^{-jk \sin \theta_d} \dots e^{-jk(N-1) \sin \theta_d}]^T$ 로 구성된 행렬이다. 각 안테나 신호 $\mathbf{x}(t_q)$ 로부터 공분산 행렬 $\hat{\mathbf{R}}$ 을 구하면 다음 식과 같다.

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{q=1}^K \mathbf{x}(t_q) \mathbf{x}^H(t_q) \quad (2)$$

균일 선형배열안테나는 안테나 간의 거리를 l 로 일정하게 배치하는데 비해 비균일 선형배열안테나는 임의의 두 안테나 간의 거리를 cl ($l=1, 2, \dots, N_a$) 로 배치한다 [1], [2]. 이와 같은 비균일 선형배열안테나에서 DOF 를 증가시켜 탐지 가능한 신호원의 개수를 늘리는 방법 중 하나로 augmentation이라는 방법이 제시되었다 [3]. Augmented covariance matrix는 다양한 안테나 간의 거리 차이를 이용해 선형배열의 공분산 행렬보다 큰 차수의 공분산 행렬을 만드는 방법이다. Augmentation을 이용한 공분산 행렬의 성분인 $r_a(m)$ 은

각 안테나 간의 거리 차이 m 에 대한 함수로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_a(m) = \sum_{d=1}^D P_d \exp(-j\pi m \omega_d) + N_0 \delta(m) \quad (3)$$

$(m=0, 1, 2, \dots, N_a)$

여기서 P_d 는 신호 파워, N_0 는 잡음 파워, $\omega_d = \sin(\theta_d)$ 이고 $l/\lambda=0.5$ 를 사용하였다. $r_a(m)$ 을 이용해 Toeplitz 행렬을 구성하면 augmented covariance matrix $\hat{\mathbf{R}}_a$ 를 구할 수 있다.

비균일 선형배열안테나에서 augmented covariance matrix를 구하면 안테나 개수보다 많은 신호원의 도래각을 추정할 수 있다. 하지만, 공분산 행렬이 일반적으로 양정치행렬 (positive-definite matrix)인 것과 달리 augmentation을 이용할 경우 공분산 행렬의 고유값이 음수로 나타나 부정치행렬이 될 수 있다. 이러한 Capon method를 이용한 도래각 추정에서 도래각의 정확한 추정을 방해하는 요소로 작용한다.

Capon method는 스펙트럼 기반의 도래각 추정 알고리즘으로 조향 각도에 대한 신호 크기를 이용하여 $\hat{\theta}$ 를 추정한다. Capon method의 스펙트럼은 식 (4)와 같다.

$$P_{\text{Capon}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (4)$$

Capon 스펙트럼의 역수인 null spectrum 을 $Q_{\text{Capon}}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)$ 라고 하고, 공분산 행렬에 고유치 분해를 적용한 후 벡터의 합으로 나타내면 다음 식과 같다.

$$Q_{\text{Capon}}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{a}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_a} \lambda_i^{-1} \|\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{u}_i\|^2 \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_{N_a}]$ 는 고유 벡터이고 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_a}\}$ 는 고유값을 대각 성분으로 하는 행렬로 고유값을 내림차순으로 나타내었다. MUSIC의 경우 null spectrum은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_{\text{MUSIC}}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta) = \sum_{i=D+1}^{N_a} \|\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{u}_i\|^2 \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{D+1} \ \mathbf{u}_{D+2} \ \dots \ \mathbf{u}_{N_a}]$ 는 잡음 부공간에 해당하는 고유 벡터로 신호원 개수 D 개를 제외한 나머지를 나타낸다. 일반적으로 SNR이 큰 경우 신호 부공간의 고유값 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D\}$ 는 잡음 부공간의 고유값 $\{\lambda_{D+1}, \lambda_{D+2}, \dots, \lambda_{N_a}\}$ 보다 크게 나타난다. 결과적으로 Capon method는 MUSIC 알고리즘과 같이 조향 벡터 $\mathbf{a}(\theta)$ 와 잡음 부공간 고유 벡터의 직교성을 이용한다는 특징을 가진다. 하지만 Capon method의 null spectrum은 MUSIC과 달리 고유값의 부호에 따라 θ 에 대해 음수를 가질 수 있다.

이러한 문제는 공분산 행렬의 고유값에 절대값을 취한 $\Lambda' = \text{diag}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_{N_a}|\}$ 을 이용하여 새로운 공분산 행렬 $\hat{\mathbf{R}}'_a = \mathbf{U} \Lambda' \mathbf{U}^H$ 을 만들면 간단히 해결할 수 있다.

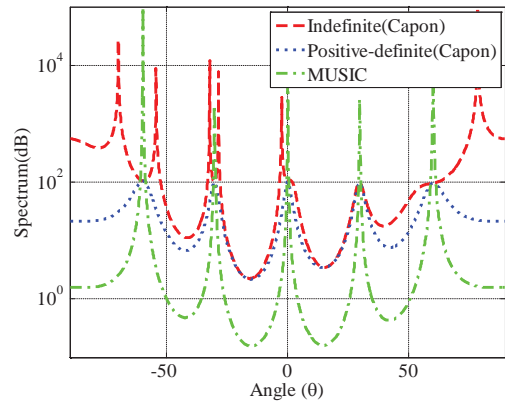


그림 1. $\hat{\mathbf{R}}_a$ 와 $\hat{\mathbf{R}}'_a$ 을 이용한 Capon 과 MUSIC 스펙트럼

III. 모의실험

본 논문에서는 비균일 선형배열안테나를 이용한 Capon method의 성능을 확인하기 위해 안테나 개수 $N=4$ 이고 $\{0, 1, 4l, 6l\}$ 의 위치에 배치하였다. 신호원 개수 $D=5$, 신호원 입사각은 $\theta = [-60^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ]$, SNR은 20dB, 측정 데이터 수는 2000개인 가우시안 분포를 나타내는 랜덤 신호를 사용하였다. 그림 1과 같이 부정치행렬 $\hat{\mathbf{R}}_a$ 를 이용하면 스펙트럼의 극대값이 도래각을 나타내지 못하는 것을 볼 수 있고, MUSIC은 고유값을 사용하지 않기 때문에 스펙트럼이 도래각에서 극대값을 나타냄을 확인할 수 있다. 그리고, 고유값의 절대값을 이용하여 새로운 공분산 행렬 $\hat{\mathbf{R}}'_a$ 을 이용하면 Capon의 도래각 추정 문제를 해결할 수 있음을 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 비균일 선형배열안테나에서 안테나 개수 N 개 이상의 신호원을 탐지하기 위해 augmentation을 사용한 경우 공분산 행렬을 고유치 분해했을 때 발생하는 음수의 고유값이 Capon method에 미치는 영향을 수식과 모의 실험을 통해 분석하였다. Capon method는 공분산 행렬의 역행렬을 이용하므로 고유값이 스펙트럼 연산에 포함되어 고유값 부호에 영향을 받지만, MUSIC의 경우 잡음 부공간의 고유 벡터만을 사용하므로 영향을 받지 않음을 알 수 있었다. 또한, 모의실험에서는 이러한 영향이 나타나는 것을 보였고, 고유값의 절대값을 이용해 새로운 공분산 행렬을 만들어 Capon method를 적용하면 음수의 고유값이 미치는 영향이 사라져 도래각 추정이 가능함을 보였다.

참고문헌

- [1] P. Pal, and P. P. Vaidyanathan, "Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom," *IEEE Trans. Signal Process.*, pp. 4167-4181, Aug. 2010.
- [2] A. T. Moffett, "Minimum redundancy linear arrays," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-16, pp.

172-175, Mar. 1968.

- [3] S. U. Pillai and F. Haber, "Statistical analysis of a high resolution spatial spectrum estimator utilizing an augmented covariance matrix," *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process.*, vol. 35, no. 11, pp. 1517-1523, Nov. 1987.